KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

2. ÅRSPRØVE 2012 S-2 DM ex ret

SKRIFTLIG EKSAMEN I DYNAMISKE MODELLER

Mandag den 4. juni 2012

Rettevejledning

Opgave 1. Vi betragter fjerdegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 4z^3 + 7z^2 + 6z + 2.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + 7\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + 7\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 2x = 4t^2 + 26t + 32.$$

(1) Vis, at

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = (z^2 + 2z + 1)(z^2 + 2z + 2),$$

og bestem dernæst alle rødderne i polynomiet P.

Løsning. At

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 4z^3 + 7z^2 + 6z + 2 = (z^2 + 2z + 1)(z^2 + 2z + 2)$$

fås ved direkte udregning.

Rødderne i polynomiet P er rødderne i de to andengradspolynomier $A_1(z) = z^2 + 2z + 1$ og $A_2(z) = z^2 + 2z + 2$. Vi finder så, at A_1 har dobbeltroden -1, og at A_2 har rødderne $-1 - i$ og $-1 + i$.

(2) Bestem mængden af de $r > 0$, så alle rødderne i polynomiet P ligger i mængden

$$K(r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq r\}.$$

Løsning. Vi ser, at $|-1| = 1$, og at$|-1-i| = |-1+i| = \sqrt{2}$, så den søgte mængde er $[\sqrt{2}, \infty[$.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$, og godtgør, at $(*)$ er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Vi finder, at den fuldstændige løsning til $(*)$ er

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^{-t} \cos(t) + c_4 e^{-t} \sin(t),$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.

Det er nu klart, at differentialligningen $(*)$ er globalt asymptotisk stabil.

(4) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Løsning. Vi skal finde et andengradspolynomium

$$Q = Q(t) = At^2 + Bt + C,$$

som er løsning til differentialligningen $(**)$.

Vi ser, at $Q'(t) = 2At + B, Q''(t) = 2A$, og at $Q'''(t) = Q''''(t) = 0$. Indsættes dette i $(**)$, får vi, at

$$2At^2 + (12A + 2B)t + (14A + 6B + 2C) = 4t^2 + 26t + 32,$$

så $A = 2, B = 1$ og $C = -1$.

Den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$ er derfor givet ved

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^{-t} \cos(t) + c_4 e^{-t} \sin(t) + 2t^2 + t - 1,$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.

(5) Lad $a \in \mathbf{R}$. Bestem de $a \in \mathbf{R}$, så differentialligningen

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Routh-Hurwitz' matrix svarende til denne differentialligning er

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

De til denne matrix hørende ledende hovedunderdeterminanter er

$$D_1 = 4 > 0, D_2 = 4a - 6 > 0, D_3 = 24a - 36 - 32 = 24a - 68 > 0,$$

og

$$D_4 = (-1)^{4+4} \cdot 2 \cdot (24a - 68) = 2 \cdot (24a - 68) = 2D_3 > 0,$$

hvor vi har fundet D_4 ved udvikling efter fjerde søjle i A_4.

Vi finder nu, at $a > \frac{3}{2}$, og at $a > \frac{68}{24} = \frac{17}{6}$.

Den givne differentialligning er således globalt asymptotisk stabil, hvis og kun hvis $a > \frac{17}{6}$.

Opgave 2. Vi betragter 3×3 matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

og vektordifferentialligningen

$$(\S) \qquad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z}.$$

(1) Bestem egenværdierne og de tilhørende egenrum for matricen A.

Løsning. Det karakteristiske polynomium P_A for matricen A er givet ved

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : P_A(t) = \det(A - tE) = \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 1 & -t & 4 \\ 0 & 2 & -t \end{pmatrix} = -t(t^2 - 9),$$

hvoraf man straks finder, at A har egenværdierne $0, -3$ og 3.

De tilhørende egenrum er

$$V(0) = N(A) = \text{span}\Big\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\},$$

$$V(-3) = N(A + 3E) = \text{span}\Big\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$$

og

$$V(3) = N(A - 3E) = \text{span}\Big\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}.$$

(2) Bestem den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (§).

Løsning. På baggrund af ovenstående resultat finder vi, at den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (§) er givet ved

$$\mathbf{z} = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

(3) Bestem resolventen $P(t, 0)$ (svarende til punktet $t_0 = 0$) for vektordifferentialligningen (§).

Løsning. Vi reducerer 3×6 matricen

$$\begin{pmatrix} -4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

til echelonmatrix, og vi finder, at

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Heraf får vi så, idet $P(t, 0) = \big(\mathbf{p}_1(t) \;\; \mathbf{p}_2(t) \;\; \mathbf{p}_2(t)\big)$, at

$$\mathbf{p}_1 = -\frac{2}{9} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} e^{-3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} e^{3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

at

$$\mathbf{p}_2 = -\frac{1}{3} e^{-3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} e^{3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

og at

$$\mathbf{p}_3 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{9} e^{-3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{9} e^{3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Idet

$$P(t,0) = \big(\mathbf{p}_1(t)\ \ \mathbf{p}_2(t)\ \ \mathbf{p}_3(t)\big),$$

skal man bestemme løsningerne $\mathbf{p}_1(t)+2\mathbf{p}_3(t)$ og $\mathbf{p}_1(t)+2\mathbf{p}_3(t)+3\mathbf{p}_2(t)$.

Løsning. På basis af ovenstående resultater får vi, at

$$\mathbf{p}_1(t) + 2\mathbf{p}_3(t) = e^{-3t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

og at

$$\mathbf{p}_1(t) + 2\mathbf{p}_3(t) + 3\mathbf{p}_2(t) = 2e^{3t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3. Vi betragter vektorfunktionen $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ givet ved

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{f}(x,y) = (x^2 + y^2 - xy, x + 2y^3).$$

(1) Bestem Jacobimatricen (funktionalmatricen) $D\mathbf{f}(x,y)$ for vektorfunktionen $\mathbf{f}$ i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$D\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y & 2y - x \\ 1 & 6y^2 \end{pmatrix}.$$

(2) Vis, at Jacobimatricen $D\mathbf{f}(1,1)$ er regulær, og bestem den inverse matrix $\big(D\mathbf{f}(1,1)\big)^{-1}$.

Løsning. Idet

$$D\mathbf{f}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$$

ser vi, at denne matrix har determinanten 5, og derfor er den regulær. Vi finder dernæst, at

$$\big(D\mathbf{f}(1,1)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

(3) Løs vektorligningen

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{f}(1,1) + D\mathbf{f}(1,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

med hensyn til

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Løsning. Vi ser, at

$$\mathbf{f}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

og herefter finder vi, at

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{f}(1,1) + D\mathbf{f}(1,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

er ensbetydende med, at

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = D\mathbf{f}(1,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u-1 \\ v-3 \end{pmatrix},$$

så

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}u - \frac{1}{5}v + \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5}u + \frac{1}{5}v + \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

(4) Vi betragter mængden

$$K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \le x \le 1707 \wedge 0 \le y \le 1783\}.$$

Vis, at mængden

$$\mathbf{f}(K) = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid \exists\,(x,y) \in K : (u,v) = \mathbf{f}(x,y)\}$$

er kompakt.

Løsning. Da mængden K er kompakt, og da vektorfunktionen $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ er kontinuert, er mængden $\mathbf{f}(K)$ kompakt.

Opgave 4. Vi betragter funktionen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(t,x,y) \in \mathbf{R}^3 : F(t,x,y) = t^2x + y^2,$$

og integralet

$$I(x) = \int_0^1 \Big(t^2x + \Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2\Big)\,dt.$$

(1) Vis, at for ethvert $t \in \mathbf{R}$ er funktionen $F = F(t,x,y)$ konveks som funktion af $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi bemærker, at

$$\frac{\partial F}{\partial x} = t^2, \text{ og at } \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,$$

så funktionen F har Hessematricen

$$F'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser, at F'' er positiv semidefinit, og dermed er F en konveks funktion af $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem den funktion $x^* = x^*(t)$, som minimerer integralet $I(x)$, når betingelserne $x^*(0) = 1$ og $x^*(1) = 3$ er opfyldt.

Løsning. Idet Eulers differentialligning er

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big) = t^2 - 2\ddot{x} = 0,$$

får vi, at

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}t^2 \Leftrightarrow \dot{x} = \frac{1}{6}t^3 + A \Leftrightarrow x = \frac{1}{24}t^4 + At + B,$$

hvor $A, B \in \mathbf{R}$.

Da $x^*(0) = 1$, får vi, at $B = 1$, og af $x^*(1) = 3$ får vi dernæst, at $A = \frac{47}{24}$.

Den søgte funktion er da

$$x^* = x^*(t) = \frac{1}{24}t^4 + \frac{47}{24}t + 1,$$

hvor $t \in [0,1]$.